Über die Beziehung der Bispinor-Theorie zur Spinor-Theorie im Riemannschen Raum

Von Ernst Schmutzer

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **17 a**, 707—711 [1962]; eingegangen am 4. Juni 1962)

In the present paper which is a continuation of three earlier works on the theory of spinors and bispinors in Riemannean space a general covariant bispinor geometry whithout using any special coordinates or the tedious orthogonal Vierbein-formalism is developped. Departing from the conventional definition of the adjoint bispinor which was the base of Schrödinger's generalisation for the Riemannean space here a new definition of this fundamental notion is given avoiding many difficulties of Schrödinger's theory which are discussed. The whole theory is coincided with the theory of spinor geometry. So it is possible to find an explicit expression for the bispinor affinities. By this work a formal conclusion of the general covariant analytical apparatus of spinor and bispinor theory and of the mutual relations is obtained.

In früheren Arbeiten in dieser Zeitschrift [1] haben wir bereits auf die Bedeutung der Beherrschung der Theorie der Spinoren und Bispinoren in krummlinigen Koordinaten hingewiesen und die wichtigsten neueren Arbeiten zitiert. Nachdem wir in den ersteren unserer Arbeiten die Theorie der Paulischen Spintensoren und der Spinor-Geometrie und in der letzten die Theorie der Dirac-Operatoren im Riemannschen Raum behandelt haben, sind wir nun in der Lage, erstens im Anschluß an Schrödinger einen allgemein-kovarianten Aufbau der Bispinor-Geometrie vorzunehmen und zweitens die beiden großen Komplexe „Spinor-Theorie" und „Bispinor-Theorie" zur Deckung zu bringen. Damit ist dann im wesentlichen dieser gesamte Problemkreis zu einem analytischen Abschluß gebracht.

Die Schrödingersche Arbeit [2] hat bekanntlich gegenüber den meisten Arbeiten zur Bispinor-Theorie den Vorteil, daß sie die Bezugnahme auf den umständlichen orthogonalen Vierbein-Formalismus vermeidet. Diesen Standpunkt haben wir uns in unseren oben zitierten Arbeiten zu eigen gemacht. Auch hier wollen wir daran festhalten. Andererseits ist aber die Schrödingersche Arbeit mit einer Reihe von Mängeln behaftet: Ein formaler Mangel besteht darin, daß sie mit einer komplexen Metrik operiert, die für die Theorie der Spinoren im gekrümmten Raum äußerst unzweckmäßig ist. Des weiteren weist sie aber noch grundsätzliche Schwierigkeiten auf, die mit der konventionellen Definition des adjungierten Bispinors verbunden sind und dadurch einer allgemein-kovarianten Einheitlichkeit der Bispinor-Geometrie im Wege stehen. Das wirkt sich wiederum auf die Konsistenz der Transformationstheorie aus, die bei Schrödinger einige Fragen unklar läßt. Wir versuchen im folgenden, völlige Klarheit in diese Situation zu bringen. Das gelingt uns durch eine von der konventionellen Definition abweichende Definition des adjungierten Bispinors *. Dadurch kann gänzlich auf Hermitezitätsforderungen an die Dirac-Operatoren verzichtet werden, ohne daß die physikalischen Notwendigkeiten verletzt werden. Diese Befreiung von Hermitezitätsansprüchen beseitigt mit einem Schlage eine Reihe weiterer Probleme, etwa derart, wie man Hermitezitätspostulate an die Dirac-Operatoren im gekrümmten Raum stellen soll.

§ 1. Bispinor-Geometrie

Wir definieren die kovariante Ableitung des Bispinors Ψ in folgender Weise (griechische Indizes laufen von $1-4$, lateinische von $1-3$):

$$\Psi_{;\nu} = \Psi_{,\nu} + \Gamma_\nu \Psi. \tag{1}$$

Bei der Bispinor-Transformation

$$\Psi' = S\,\Psi \tag{2}$$

soll die kovariante Ableitung den Charakter eines Bispintensors haben, sich also wie folgt,

$$\Psi'_{;\nu'} = S\,\Psi_{;\nu} A^\nu_{\nu'} \quad (A^\nu_{\nu'} = \partial x^\nu / \partial x^{\nu'}), \tag{3}$$

transformieren. Daraus resultiert für die Bispinor-Affinität die Transformationsformel

$$\Gamma'_{\nu'} = A^\nu_{\nu'}\,(S\,\Gamma_\nu\,S^{-1} - S_{,\nu}\,S^{-1}). \tag{4}$$

[1] E. Schmutzer, Z. Naturforschg. **15 a**, 355, 831 [1960]; **16 a**, 825 [1961]; **17 a**, 685 [1962].

[2] E. Schrödinger, S.B. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1932, S. 105.

* Vgl. V. Bargmann, S.B. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1932, S. 346.

Mit Hilfe des hermitesch-konjugierten Bispinors Ψ^+ und des zunächst freibleibenden Operators β definieren wir den adjungierten Bispinor

$$\overline{\Psi} = \Psi^+ \beta . \tag{5}$$

Postulieren wir für alle weiteren Rechnungen grundsätzlich die LEIBNIZsche Produktregel für die kovariante Ableitung von Produkten aus spinoriellen und tensoriellen Größen und außerdem, daß $\overline{\Psi}\,\Psi$ eine Invariante sei (für Invarianten fällt die kovariante mit der partiellen Ableitung zusammen), so folgt für die kovariante Ableitung des adjungierten Bispinors

$$\overline{\Psi}_{;\nu} = \overline{\Psi}_{,\nu} - \overline{\Psi}\,\Gamma_\nu . \tag{6}$$

Für die Transformationsformel des adjungierten Bispinors resultiert aus (2) die Beziehung

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}\,(\beta^{-1}\,S^+\,\beta') . \tag{7}$$

Damit sich $\overline{\Psi}_{;\nu}$ wie ein adjungierter Bispintensor, also wie

$$\overline{\Psi}'_{;\nu'} = \overline{\Psi}_{;\nu}\,(\beta^{-1}\,S^+\,\beta')\;A^{\nu}_{\nu'} \tag{8}$$

transformiert, muß sein:

$$S^+\,\beta' = \beta\,S^{-1} , \tag{9}$$

so daß entsteht:

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}\,S^{-1} . \tag{10}$$

Eine weitere Bedingung an β ergibt sich, indem wir (1) hermitesch konjugieren und von rechts mit β multiplizieren. Der Vergleich mit (6) liefert dann bei Verwendung von $(\Psi_{;\nu})^+ = \Psi^+{}_{;\nu}$

$$\beta_{;\nu} = \beta_{,\nu} - \beta\,\Gamma_\nu - \Gamma_\nu^+\,\beta . \tag{11}$$

Aus der Forderung, daß Bildungen der Form $(\overline{\Psi}\,\gamma_\nu\,\gamma^\mu \ldots \Psi)$ Tensoren bzw. Pseudotensoren sein mögen, folgert man die Transformationsformel

$$\gamma'_{\nu'}\,\gamma'_{\mu'} \ldots = S\,\gamma_\nu\,\gamma_\mu \ldots S^{-1}\,A^{\nu}_{\nu'}\,A^{\mu}_{\mu'} \ldots \tag{12}$$

für aus DIRAC-Operatoren gebildete Produkte. Zur Symbolik ist dabei zu bemerken, daß sich der Strich an den griechischen bzw. lateinischen Indizes auf Tensortransformationen, der Strich am Symbol dagegen auf Bispinor-Transformationen bezieht. Es ist außerordentlich zweckmäßig, daß wir uns dieser Bezeichnungsweise bedienen, da ja in unserer globalen Schreibweise Bispinor-Indizes unterdrückt sind.

Aus (2) und (6) resultiert für die kovariante Ableitung des Bispinors zweiter Stufe $\Psi\,\overline{\Psi}$ die Formel

$$(\Psi\,\overline{\Psi})_{;\nu} = (\Psi\,\overline{\Psi})_{,\nu} + [\Gamma_\nu,\,\Psi\,\overline{\Psi}] . \tag{13}$$

Da die DIRAC-Operatoren bezüglich ihres Bispinor-Charakters von zweiter Stufe sind, bezüglich des Index jedoch Tensorcharakter besitzen, wie aus (12) ersichtlich ist, so setzen wir für die kovariante Ableitung der DIRAC-Operatoren

$$\gamma_{\mu;\nu} = \gamma_{\mu,\nu} - \genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha}{\mu\nu}\,\gamma_\alpha + [\Gamma_\nu,\,\gamma_\mu] , \tag{14}$$

$$\gamma^{\mu}_{;\nu} = \gamma^{\mu}_{,\nu} + \genfrac\{\}{0pt}{}{\mu}{\alpha\nu}\,\gamma^\alpha + [\Gamma_\nu,\,\gamma^\mu] . \tag{15}$$

Die sinngemäße Verallgemeinerung auf Produkte von DIRAC-Operatoren führt auf die Formel

$$(\gamma_\mu^{\nu}{}_{::} = \gamma_\mu\,\gamma^{\nu}{}_{\ldots})$$

$$\gamma_\mu^{\nu}{}_{::;\lambda} = \gamma_\mu^{\nu}{}_{::,\lambda} - \genfrac\{\}{0pt}{}{\beta}{\mu\lambda}\,\gamma_\beta^{\nu}{}_{::} + \genfrac\{\}{0pt}{}{\nu}{\beta\lambda}\,\gamma_\mu^{\beta}{}_{::} + [\Gamma_\lambda,\,\gamma_\mu^{\nu}{}_{::}] . \tag{16}$$

Um die Konsistenz mit dem Axiom

$$\gamma_\mu\,\gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\,i\,\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\varkappa\lambda}\,\gamma_\varkappa\,\gamma_\lambda\,\gamma_5 \tag{17}$$

für die DIRAC-Operatoren zu gewährleisten, postulieren wir

$$\gamma_{\mu;\nu} = 0 , \tag{18}$$

woraus

$$\gamma^{\mu}_{;\nu} = 0 \tag{19}$$

folgt. Für den Vektor-Operator $\boldsymbol{\gamma} = \mathfrak{e}_\mu\,\gamma^\mu$ ergibt sich dann

$$\boldsymbol{\gamma}_{;\nu} = \boldsymbol{\gamma}_{,\nu} + [\Gamma_\nu,\,\boldsymbol{\gamma}] = 0 . \tag{20}$$

Aus (1) erhält man nach kurzer Rechnung wegen $\Psi_{,\mu,\nu} = \Psi_{,\nu,\mu}$, bei Verwendung der Abkürzung

$$\Phi_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu,\mu} + [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] , \tag{21}$$

die Beziehung

$$\Psi_{;\mu;\nu} - \Psi_{;\nu;\mu} = \Phi_{\mu\nu}\,\Psi . \tag{22}$$

Man erkennt daraus, daß die kovarianten Ableitungen von Bispinoren i. allg. nicht vertauschbar sind.

Eine analoge Überlegung stellen wir jetzt bezüglich der Vertauschbarkeit der Ableitungen der DIRAC-Operatoren an: Mit Hilfe von (14) und (15) sowie der ohne Schwierigkeiten deduzierbaren Relation

$$[\Gamma_\nu,\gamma_\mu]_{,\lambda} = [\Gamma_{\nu,\lambda},\gamma_\mu] - [\Gamma_\nu,[\Gamma_\lambda,\gamma_\mu]] + \genfrac\{\}{0pt}{}{\beta}{\mu\lambda}\,[\Gamma_\nu,\gamma_\beta] \tag{23}$$

gewinnt man bei Verwendung des RIEMANNschen Krümmungstensors in der Form

$$R^{\alpha}{}_{\mu\lambda\nu} = \genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha}{\mu\nu}_{,\lambda} - \genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha}{\mu\lambda}_{,\nu} + \genfrac\{\}{0pt}{}{\beta}{\mu\nu}\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha}{\beta\lambda} - \genfrac\{\}{0pt}{}{\beta}{\mu\lambda}\genfrac\{\}{0pt}{}{\alpha}{\beta\nu} \tag{24}$$

die Beziehung

$$\gamma_{\mu,\nu,\lambda} - \gamma_{\mu,\lambda,\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\lambda\nu}\,\gamma_\alpha - [\Phi_{\nu\lambda},\gamma_\mu] = 0 . \tag{25}$$

Multiplikation von rechts mit γ^μ liefert bei Verwendung von

$$\gamma^\mu\,\mathfrak{S}_{\alpha\beta}\,\gamma_\mu = 0 ; \quad (\mathfrak{S}_{\alpha\beta} = (1/2i)\,[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]) \tag{26}$$

die wichtige Formel

$$\Phi_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{4}\, i\, R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\nu}\, \mathfrak{S}_{\alpha\beta} + f_{\nu\lambda}\,, \tag{27}$$

wobei $f_{\nu\lambda}$ einen Tensor von gewöhnlichem Zahlencharakter bedeutet, für den gilt:

$$f_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{4}\mathrm{Spur}\; \Phi_{\nu\lambda} = (\tfrac{1}{4}\mathrm{Spur}\; \Gamma_\nu)_{,\lambda} - (\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Spur}\; \Gamma_\lambda)_{,\nu}\,. \tag{28}$$

Diese Beziehung wurde bereits von SCHRÖDINGER gewonnen. Wir werden später den genauen Zusammenhang mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor herstellen können.

Wir merken an, daß wir eine Verallgemeinerung der kovarianten Ableitung (14) in der Form

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu:\nu} &= \gamma_{\mu,\nu} - \left\{{\beta \atop \mu\nu}\right\}\gamma_\beta + [\Gamma_\nu, \gamma_\mu] \\ &\quad + iA\,\mathfrak{S}_{\mu\nu} + B\gamma_5\, g_{\mu\nu} \quad (A, B \text{ Funktionen})\end{aligned} \tag{29}$$

probeweise versucht und bis zu einem gewissen Grad durchgeführt haben. Dabei sind die folgenden Formeln von Nutzen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mu\nu,\lambda} &= \left\{{\beta \atop \mu\lambda}\right\}\mathfrak{S}_{\beta\nu} + \left\{{\beta \atop \nu\lambda}\right\}\mathfrak{S}_{\mu\beta} + \frac{A}{i}(g_{\mu\lambda}\gamma_\nu - g_{\nu\lambda}\gamma_\mu) \\ &\quad + \frac{B\gamma_5}{i}(g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu) + [\Gamma_\lambda, \mathfrak{S}_{\nu\mu}],\end{aligned} \tag{30}$$

$$\gamma_{5,\lambda} = [\gamma_5, \Gamma_\lambda] + A\,\gamma_\lambda\gamma_5 + B\,\gamma_\lambda\,, \tag{31}$$

$$\mathfrak{S}^{\sigma\alpha}\gamma_\sigma = 3\,i\,\gamma^\alpha, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}[][\Gamma_\nu, \gamma_\mu]_{,\lambda} &= [\Gamma_{\nu,\lambda}, \gamma_\mu] - [\Gamma_\nu, [\Gamma_\lambda, \gamma_\mu]] \\ &\quad + \left\{{\beta \atop \mu\lambda}\right\}[\Gamma_\nu, \gamma_\beta] - iA\,[\Gamma_\nu, \mathfrak{S}_{\mu\lambda}] - Bg_{\mu\lambda}[\Gamma_\nu, \gamma_5]\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Bei der im nächsten Paragraphen durchgeführten Korrespondenz zwischen Bispinor- und Spinorapparat zeigt es sich dann aber, daß $A=0$ und $B=0$ zu setzen ist.

§ 2. Zusammenhang von Spinor-Geometrie und Bispinor-Geometrie im Riemannschen Raum

Mit Hilfe der in unserer letzten Arbeit[1] zu diesem Problemkreis gewonnenen Formel

$$\gamma^\mu = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{\mu A\dot{B}} \\ -\sigma^\mu{}_{\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

lassen sich die beiden Formen der DIRAC-Gleichung

$$\gamma^\mu \Psi_{;\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\Psi = 0 \tag{35}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\dot{A}B}\Psi_{B;\mu} - \frac{i\,m_0 c}{\hbar}\chi^{\dot{A}} &= 0\,; \\ \sigma^\mu{}_{\dot{B}A}\,\chi^{\dot{B}}_{;\mu} - \frac{i\,m_0 c}{\hbar}\Psi_A &= 0\end{aligned} \tag{36}$$

zur Deckung bringen, wenn man setzt:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\chi^A \\ \Psi_{\dot{A}}\end{pmatrix}\;;\quad \Psi^+ = (\chi^{\dot{A}}\,\Psi_A)\,. \tag{37}$$

Durch Vergleich von (1) mit den bekannten Beziehungen

$$\Psi_{A;\mu} = \Psi_{A,\mu} - \Gamma^B_{A\mu}\Psi_B;\; \chi^A_{;\mu} = \chi^A_{,\mu} + \Gamma^A_{B\mu}\chi^B \tag{38}$$

ergibt sich für die Bispinor-Affinität

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix}\Gamma^A_{B\mu} & 0 \\ 0 & -\Gamma^{\dot{B}}_{\dot{A}\mu}\end{pmatrix},\; \Gamma^+_\mu = \begin{pmatrix}\Gamma^{\dot{B}}_{\dot{A}\mu} & 0 \\ 0 & -\Gamma^A_{B\mu}\end{pmatrix}, \tag{39}$$

wobei die $\Gamma^A_{B\mu}$ die Spinor-Affinitäten sind, deren explizite Gestalt wir früher[1] angeben konnten:

$$\Gamma^B_{A\mu} = \left\{{B \atop A\mu}\right\} + \tfrac{1}{2}\, i\,\gamma_A{}^B(\Phi_\mu + \Pi_\mu + i\,\Gamma_{,\mu})\,. \tag{40}$$

Dabei ist

$$\left\{{B \atop A\mu}\right\} = \tfrac{1}{4}\left\{{\lambda \atop \varrho\mu}\right\}\sigma_{\lambda\dot{C}A}\,\sigma^{\varrho\dot{C}B} - \tfrac{1}{4}\,\sigma^{\varrho\dot{C}B}\,\sigma_{\varrho\dot{C}A,\mu} \tag{41}$$

und

$$\Gamma = \ln\sqrt{\gamma} = \ln\sqrt{\gamma_{\dot{1}\dot{2}}\,\gamma_{12}} \tag{42}$$

(vgl. frühere Symbolik). Es ist uns damit gelungen, das Problem der expliziten Angabe der Bispinor-Affinitäten zu lösen. Bekanntlich gibt es zu diesem Fragenkreis umfangreiche Untersuchungen[3].

Im folgenden berechnen wir $\Phi_{\nu\lambda}$: Bei Benutzung von (39) nimmt (21) die Gestalt

$$\Phi_{\nu\lambda} = \begin{pmatrix}P^A{}_{B\lambda\nu} & 0 \\ 0 & -P^{\dot{B}}{}_{\dot{A}\lambda\nu}\end{pmatrix} \tag{43}$$

an. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spur}\;\Phi_{\nu\lambda} = P^A{}_{A\lambda\nu} - P^{\dot{A}}{}_{\dot{A}\lambda\nu} \\ &(P^B{}_{A\nu\lambda} = \Gamma^B_{A\lambda,\nu} - \Gamma^B_{A\nu,\lambda} + \Gamma^B_{C\nu}\Gamma^C_{A\lambda} - \Gamma^B_{C\lambda}\Gamma^C_{A\nu})\,,\end{aligned} \tag{44}$$

so daß wir für (28) wegen $P^A{}_{A\nu\lambda} = i(\Phi_{\nu\lambda} + \Pi_{\nu\lambda})$

$$f_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}\, i\,(\Phi_{\lambda\nu} + \Pi_{\lambda\nu}) \tag{45}$$

schreiben können. Früher haben wir die rechte Seite dieser Gleichung mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor $H_{\lambda\nu}$ in Beziehung bringen können, so daß schließlich der wichtige Zusammenhang

$$f_{\nu\lambda} = -\,[i\,e/(\hbar\, c)]\, H_{\lambda\nu} \tag{46}$$

resultiert.

Die Transformationsformeln

$$\chi^{A'} = \Lambda^{A'}_B\,\chi^B;\quad \Psi_{A'} = \Lambda^B_{A'}\Psi_B \tag{47}$$

für Spinoren gestatten mit Hilfe von (37) und (2) die explizite Angabe der Bispinoren-Transformation:

$$S = \begin{pmatrix}\Lambda^{A'}_B & 0 \\ 0 & \Lambda^{\dot{B}}_{\dot{A}'}\end{pmatrix};\quad S^{-1} = \begin{pmatrix}\Lambda^A_{B'} & 0 \\ 0 & \Lambda^{\dot{B}'}_{\dot{A}}\end{pmatrix}. \tag{48}$$

Vermöge (9) können wir nun leider den Operator β nicht weiter festlegen. Dagegen gelingt uns eine nähere Festlegung von β durch folgende Überlegung: Wir gehen von (35) zur hermitesch-konjugierten DIRAC-Gleichung über und multiplizieren von

[3] J. G. FLETCHER, Nuovo Cim. 8, 451 [1958].

rechts mit β durch. Einige weitere Umformungen ergeben dann

$$\overline{\Psi}_{;\mu}(\beta^{-1}\gamma^{\mu+}\beta) - \Psi^{+}\beta_{;\mu}(\beta^{-1}\gamma^{\mu+}\beta) + (m_0 c/\hbar)\,\overline{\Psi} = 0. \qquad (49)$$

Mit Rücksicht auf die Kontinuitätsgleichung für den Stromdichtevektor müssen wir für die adjungierte Dirac-Gleichung die Form

$$\overline{\Psi}_{;\mu}\gamma^{\mu} - (m_0 c/\hbar)\,\overline{\Psi} = 0 \qquad (50)$$

fordern. Daraus resultiert dann die wichtige Vertauschungsregel

$$\gamma^{\mu+}\beta = -\beta\gamma^{\mu} \qquad (51)$$

sowie

$$\beta_{;\mu} = 0\,. \qquad (52)$$

Die Kontinuitätsgleichung selbst hat die Gestalt

$$(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)_{;\mu} = 0\,. \qquad (53)$$

Durch Iteration der Dirac-Gleichung (35) ergibt sich in bekannter Weise die iterierte Dirac-Gleichung

$$\Psi_{;\mu}^{;\mu} - \tfrac{1}{2}i\,\mathfrak{S}^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}\Psi - (m_0^2 c^2/\hbar^2)\,\Psi = 0\,, \qquad (54)$$

die man mit Hilfe von

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathfrak{S}^{\mu\nu}\mathfrak{S}^{\alpha\beta} + \mathfrak{S}^{\alpha\beta}\mathfrak{S}^{\mu\nu}) = -4R \qquad (55)$$

in folgender Weise schreiben kann:

$$\Psi_{;\mu}^{;\mu} - \frac{e}{2\hbar c}\mathfrak{S}^{\mu\nu}H_{\mu\nu}\Psi + \frac{R}{4}\Psi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi = 0\,. \qquad (56)$$

Von besonderem Interesse an dieser Gleichung ist das Glied mit dem Krümmungsskalar.

Im folgenden bestimmen wir den Operator β näher: Macht man für β einen allgemeinen Ansatz mit beliebigen Untermatrizen und geht man dann mit diesem Ansatz sowie mit (34) in (51) ein, so ergibt sich

$$\beta = f\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \\ -\gamma^{A}{}_{B} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (57)$$

wobei f ein zunächst freier Faktor ist. Mit Hilfe von (39) erhält man

$$\beta\,\Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu}^{+}\beta = 0\,, \qquad (58)$$

Deshalb folgt aus (11) $\quad \beta_{;\mu} = \beta_{,\mu} \qquad (59)$

oder wegen (52) $\quad f = \text{const.} \qquad (60)$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $f = 1$, so daß endgültig resultiert:

$$\beta' = \beta = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} \\ -\gamma^{A}{}_{B} & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{A}{}_{B} \\ \gamma_{\dot{A}}{}^{\dot{B}} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta^2 = 1\,, \qquad (61)$$

$$\beta^{+} = \beta\,. \qquad (62)$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Bildung hermitescher Kovarianten: Ohne Schwierigkeiten ersieht man, daß die Invariante $\overline{\Psi}\Psi$ hermitesch ist. Wegen (51) ergibt sich dasselbe für den Tensor erster Stufe $(i\,\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi)$, ohne daß Hermitezitätsforderungen an die Dirac-Operatoren gestellt zu werden brauchen. Aus der Definition [1] von γ_5 ergibt sich bei Benutzung von (51)

$$\gamma_5^{+}\beta = -\beta\gamma_5\,. \qquad (63)$$

In unserer früheren Arbeit [1] haben wir $\gamma_5 = \pm\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ erhalten, also $\gamma_5{}^{+} = \gamma_5$. Damit folgt dann

$$\gamma_5\beta = -\beta\gamma_5\,. \qquad (63')$$

Verwendet man dieses Ergebnis, so kann man leicht die Hermitezität der Pseudoinvariante $(i\,\overline{\Psi}\gamma_5\Psi)$ beweisen. Analog laufen nun die Konstruktionen der übrigen Kovarianten.

Wir müssen jetzt zu den eben erhaltenen Ergebnissen einige grundsätzliche Bemerkungen machen: Durch die Einführung des β bei der adjungierten Konjugation brauchten wir keinerlei Gebrauch von Hermitezitätseigenschaften der Dirac-Operatoren zu machen. Insbesondere ist also die Hermitezität der Kovarianten wegen der Vertauschungsregel (51) nicht an die Indexstellung gebunden, wie das der Fall bei Schrödinger ist, der die adjungierte Konjugation, die herkömmliche Prozedur einfach verallgemeinernd, mit Hilfe von γ_4 definiert und dadurch bezüglich der Hermitezität dieser Kovarianten mit anderen Indexstellungen eine Reihe schwerwiegender Probleme heraufbeschwört. Außerdem treten dadurch Fragen auf, die sich mit dem Geist des Kovarianz-Kalküls nicht vertragen. So nimmt z. B. die Invariante $\overline{\Psi}\Psi$ die Form

$$\overline{\Psi}\Psi = -i\,(\sigma_{4\,\dot{B}A}\Psi_B\chi^A + \sigma_4^{B\dot{A}}\chi^{\dot{B}}\Psi_{\dot{A}})$$

an, die i. allg. keine Invariante darstellen kann, während sich in unserer Axiomatik bei der gewählten Festlegung von β die sichtlich invariante Form

$$\overline{\Psi}\Psi = \chi^A\Psi_A + \chi^{\dot{A}}\Psi_{\dot{A}} \qquad (64)$$

ergibt. Es ist verständlich, daß dadurch bei Schrödinger die Transformationsverhältnisse bei einer Reihe von Größen undurchsichtig werden. Durch das Auffinden unseres β-Operators sind wir in der glücklichen Lage, daß wir von den früher [1] diskutierten möglichen Spezialisierungen

$$\gamma^{i+} = \gamma^i;\ \gamma_4^{+} = -\gamma_4 \quad \text{bzw.} \quad \gamma_i^{+} = \gamma_i\,,\ \ \gamma^{4+} = -\gamma^4$$

keinen Gebrauch machen müssen und dadurch nicht vor die Frage gestellt sind, den Kalkül auf bestimmte spezielle Koordinaten reduzieren zu müssen, für die physikalische Hermitezitätsbedürfnisse zu befriedigen sind. Wegen der Vertauschungsregel (51) sind die Größen $\beta \gamma_\mu$ und $\beta \gamma_5 \gamma_\mu$ usw. im Rahmen unserer Axiomatik ohne Voraussetzung einer Hermitezität für die γ_μ unabhängig von der Indexstellung hermitesch bzw. antihermitesch. Dieses Resultat gilt natürlich auch im Spezialfall des MINKOWSKI-Raumes bei Benutzung von GALILEI-Koordinaten. Deshalb ist auch im Rahmen der gewöhnlichen DIRAC-Theorie in GALILEI-Koordinaten die Postulierung von Hermitezitätseigenschaften der DIRAC-Operatoren zu vermeiden, wenn man die von uns gewählte Axiomatik zugrunde legt. Sowohl in der speziell-relativistischen als auch in der allgemein-relativistischen Theorie hat man im Sinne unserer Festlegungen gleichzeitig einen Schönheitsfehler beseitigt, der dem Relativisten erhebliches Kopfzerbrechen bereitet, nämlich warum bei der Bildung des adjungierten Spinors die Größe γ_4 ausgezeichnet wird.

Wir untersuchen nun, welche Konsequenzen die Festsetzung

$$\beta = i\,\gamma_4\,, \tag{65}$$

die der konventionellen Theorie entspricht, nach sich zieht: Ausgeschrieben lautet (65)

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\dot A}{}^{\dot B} \\ -\gamma^A{}_B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_4{}^{A\dot B} \\ \sigma_{4\dot A B} & 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Somit ist (65) nur dann mit der Kovarianz verträglich, wenn man sich auf solche Transformationen beschränkt, für die sich $\sigma_4{}^{A\dot B}$ und $\sigma_{4\dot A B}$ wie $\gamma_A{}^B$ transformieren, d. h. für die $\sigma_4{}^{A\dot B}$ und $\sigma_{4\dot A B}$ konstant bleiben. Das ist insbesondere bei LORENTZ-Transformationen der Fall. Die Beziehung (65) würde außerdem $\beta^2 = -\gamma_4{}^2 = -g_{44} = \text{const}$ nach sich ziehen, also eine Folgerung, die zur Benutzung allgemein-krummliniger Koordinaten im Widerspruch steht. In GALILEI-Koordinaten dürfte diese Zufälligkeit der Übereinstimmung von β mit $i\gamma_4$, die hier vorgetäuscht wird, kaum erkennbar sein.

Aus der Vertauschungsregel (51) resultiert bei Benutzung von (65) das Ergebnis

$$\gamma^{i+} = \gamma^i; \quad \gamma_4{}^+ = -\gamma_4\,, \tag{67}$$

worüber wir früher [1] ausführliche Untersuchungen angestellt haben. Diese Hermitezitätswahl wird also durch die Festsetzung (65) induziert, wie man hier klar erkennen kann. Würde man diese Wahl aus physikalischen Gründen grundsätzlich treffen müssen, d. h. auch in transformierten Koordinatensystemen zugrunde legen müssen, so dürften solche Transformationen die Bedingung

$$\Lambda^* \Lambda = 1 \tag{68}$$

nicht verletzen, wie wir früher gezeigt haben. Schon das einfache Beispiel einer infinitesimalen Koordinatentransformation, bei der

$$\Lambda = \Lambda^* = 1 + \tfrac{1}{2}\,\xi^\alpha{}_{,\alpha} \tag{69}$$

gilt [1], ist

$$\Lambda^* \Lambda = 1 + \xi^\alpha{}_{,\alpha} \neq 1\,, \tag{70}$$

also die Invarianz der Wahl (67) nicht erfüllt. Lediglich im Fall von LORENTZ-Transformationen gilt wegen $\xi^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ die Beziehung $\Lambda^* \Lambda = 1$. Damit würde der von SCHRÖDINGER eingeschlagene Weg zu der unserer Meinung nach physikalisch inakzeptablen Situation führen, daß bereits bei infinitesimalen Koordinatentransformationen die notwendige Hermitezitätsstruktur verletzt wird.

Abschließend noch einige kurze Bemerkungen: Ein Blick auf (48) zeigt, daß die Bispinor-Transformation i. allg. keine unitäre Transformation ist. Aus Hermitezitätsgründen muß SCHRÖDINGER Unitarität fordern, sich also auf

$$S^+ = S^{-1} \tag{71}$$

beschränken. In der Sprache des Spinor-Kalküls heißt das

$$\Lambda^A_{B'} = \Lambda^{\dot B'}_{\dot A}\,. \tag{72}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch einige Transformationsformeln für infinitesimale Bispinor-Transformationen der Form

$$S = 1 + i\,\Theta; \quad S^{-1} = 1 - i\,\Theta; \quad S^+ = 1 - i\,\Theta^+ \tag{73}$$

an:

$$\gamma'_\mu = \gamma_\mu + i\,[\Theta, \gamma_\mu]\,, \tag{74}$$

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu + i\,[\Theta, \Gamma_\mu] - i\,\Theta_{,\mu}\,, \tag{75}$$

$$\Phi'_{\nu\lambda} = \Phi_{\nu\lambda} + i\,[\Theta, \Phi_{\nu\lambda}]\,, \tag{76}$$

$$\Psi' = \Psi + i\,\Theta\,\Psi, \quad (77) \qquad \overline{\Psi}' = \overline{\Psi} - i\,\overline{\Psi}\,\Theta \quad (78)$$

Herrn J. NOTTROTT danke ich für Kontrollrechnungen. Herrn Prof. P. G. BERGMANN danke ich für den mir auf der Warschauer Gravitationstagung 1962 gegebenen Hinweis auf seine Arbeit in Phys. Rev. 1957.